

Elementarna matematika 2

predavanja

Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO

Planimetrija

Definicija

Za točku $S \in M$ i realan broj $r > 0$, skup

$$k(S, r) = \{T \in M : d(S, T) = r\}$$

zovemo *kružnica sa središtem u S i polumjerom r* .

Definicija

Neka je $T \in M$ proizvoljna točka i $p \subset M$ proizvoljni pravac. Udaljenost točke T od pravca p je

$$d(T, p) := \min\{d(T, X) : X \in p\}$$

Propozicija

Udaljenost točke $T \in M$ od pravca $p \subset M$ je udaljenost T od nožišta N okomice iz T na p .

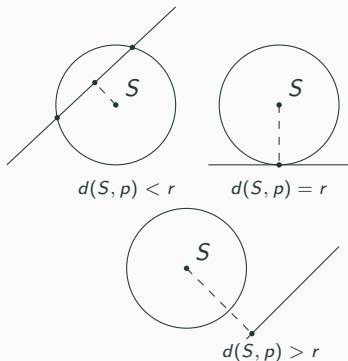
Propozicija 14

Za pravac p i kružnicu $K(S, r)$ vrijedi:

- (a) (1) Ako je $d(S, p) < r$, pravac p siječe kružnicu u točno dvije točke.
- (2) Ako je $d(S, p) = r$, pravac p siječe kružnicu u jednoj točki **diralištu**; tada kažemo da p dira kružnicu i zovemo ga **tangenta**. Ako p dira kružnicu, pravac okomit na p kroz diralište prolazi i središtem S .
- (3) Ako je $d(S, p) > r$, pravac p ne siječe kružnicu.
- (b) Kružnice $k(S_1, r_1)$ i $k(S_2, r_2)$ s različitim središtima S_1 i S_2 sijeku se ako i samo ako

$$|r_1 - r_2| \leq d(S_1, S_2) \leq r_1 + r_2.$$

Ako vrijedi jedna od jednakosti, kružnice se dodiruju u jednoj točki; ako su obje nejednakosti stroge, sijeku se u dvije točke.



Dokaz jednog smjera. Neka se kružnice $k(S_1, r_1)$ i $k(S_2, r_2)$ sijeku u dvije točke A i B . Iz (M_3) za $\triangle AS_1S_2$ slijedi:

$$d(S_1, S_2) < d(S_1, A) + d(A, S_2) = r_1 + r_2.$$

Također,

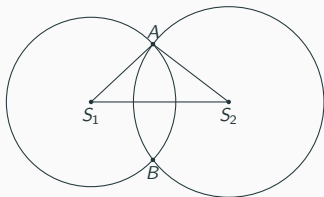
$$r_1 = d(A, S_1) < d(S_1, S_2) + d(S_2, A) = d(S_1, S_2) + r_2,$$

$$r_2 = d(A, S_2) < d(S_1, S_2) + d(S_1, A) = d(S_1, S_2) + r_1.$$

Slijedi da je

$$|r_1 - r_2| < d(S_1, S_2).$$

(Za drugi smjer trebala bi nam topologija.)



Aksiom o paralelama

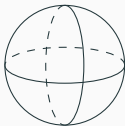
Uočimo da nigdje dosad nismo koristili aksiom o paralelama (P). Štoviše, postoje geometrije u kojima vrijede sve dosad navedene tvrdnje, osim (P).

Eliptička (sferna) geometrija

Promatramo sferu radijusa 1 u $\mathbb{R}^3$.

- **Točke:** par dijametralno suprotnih točaka na sferi.
- **Pravci:** najveće kružnice na sferi.

Aksiom o paralelama ne vrijedi: svaka dva “pravca” se sijeku.

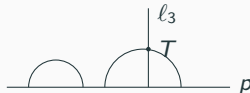


Poincaréov model hiperb. geom.

Poluravnina H određena pravcem p .

- **Točke:** bilo koja točka iz H .
- **Pravci:** polukružnica sa središtem na p ili pravac okomit na p .

Aksiom o paralelama ne vrijedi: kroz istu točku prolazi više pravaca paralelnih zadanom pravcu.



Aksiom o paralelama

Definicija

Neka su $p \neq q$ paralelni pravci. Svaki pravac t koji siječe p i q zove se **transverzala** pravaca p i q .

Propozicija 15

Neka su $p \neq q$ dva pravca te neka je t njihova transverzala.

Uz oznake kao na slici vrijedi

$$\alpha = \gamma = \alpha_1 = \delta_1, \quad \beta = \delta = \beta_1 = \gamma_1,$$

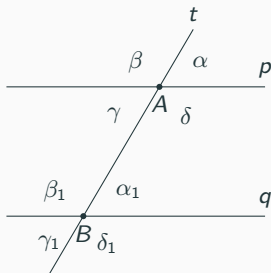
te

$$\alpha + \beta = \pi.$$

Vrijedi i obrat: ako je $\alpha = \alpha_1$, tada su pravci p i q paralelni.

Dokaz. $\Leftarrow$ Neka t siječe p u točki A i q u točki B tako da je $\alpha = \alpha_1$ i pretpostavimo suprotno, tj. p i q nisu paralelni.

Slijedi da se p i q sijeku u nekoj točki T .



Aksiom o paralelama

Sada je α vanjski kut trokuta $\triangle ABT$, pa je veći od unutarnjeg kuta $\angle ABT = \alpha_1$. Kontradikcija.

Dakle, $p \parallel q$.

$\Rightarrow$ Neka je sada $p \parallel q$ te t siječe p u A i q u B . Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. $\alpha \neq \alpha_1$.

Neka je $\tilde{q}$ pravac kroz B takav da s pravcem t zatvara kut α .

Sada je po smjeru $\Leftarrow p \parallel \tilde{q}$.

No, tada kroz točku B možemo provući dva pravca, q i $\tilde{q}$ paralelna s p .

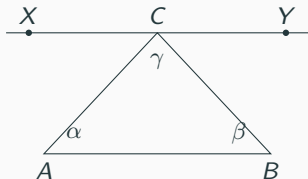
To je kontradikcija s aksiomom (P) .



Aksiom o paralelama

Propozicija 16

Zbroj kutova u trokutu jednak je ispruženom kutu.



Dokaz.

Po Prop.15.,

$$\angle XCA = \angle CAB = \alpha,$$

$$\angle YCB = \angle CBA = \beta.$$

Slijedi da je

$$\pi = \angle XCA + \angle ACB + \angle YCB = \alpha + \gamma + \beta.$$



Propozicija 17

Vanjski kut trokuta jednak je zbroju dvaju njemu nesusjednih unutarnjih kutova.

Klasična geometrija trokuta

Standardne oznake u trokutu $\triangle ABC$

$$\begin{aligned}a &= |\overline{BC}|, & b &= |\overline{AC}|, & c &= |\overline{AB}|, \\ \alpha &= \angle BAC, & \beta &= \angle ABC, & \gamma &= \angle ACB.\end{aligned}$$

Definicija sukladnosti

Trokuti T_1 i T_2 su **sukladni** ako im se vrhovi mogu označiti s A_1, B_1, C_1 i A_2, B_2, C_2 tako da vrijedi

$$|\overline{A_1B_1}| = |\overline{A_2B_2}|, \quad |\overline{A_1C_1}| = |\overline{A_2C_2}|, \quad |\overline{B_1C_1}| = |\overline{B_2C_2}|,$$

$$\angle C_1A_1B_1 = \angle C_2A_2B_2, \quad \angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2, \quad \angle A_1C_1B_1 = \angle A_2C_2B_2.$$

Pišemo

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2.$$

Lako se pokaže da je relacija $\cong$ relacija ekvivalencije na skupu svih trokuta.

Uočimo: ako postoji izometrija f takva da $f(A_1) = A_2$, $f(B_1) = B_2$, $f(C_1) = C_2$, tada je $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$. Obrat nije očigledan.

Klasična geometrija trokuta

Teorem 18 (o sukladnosti trokuta)

Dva trokuta su sukladna ako vrijedi bilo koja od sljedećih tvrdnji:

1. **(S-S-S):** *podudaraju se duljine svih triju stranica*

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2.$$

2. **(S-K-S):** *podudaraju se duljine dviju stranica i kut među njima*

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$

3. **(K-S-K):** *podudaraju se duljina jedne stranice i oba kuta uz tu stranicu*

$$a_1 = a_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$

4. **(S-S-K[>]):** *podudaraju se duljine dviju stranica i kut nasuprot većoj od njih*

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad a_1 > b_1, \quad \alpha_1 = \alpha_2,$$

tada su trokuti sukladni.

Klasična geometrija trokuta

Dokaz. Uočimo, po napomeni je dovoljno pronaći izometriju f koja preslikava vrhove jednog trokuta u vrhove drugog trokuta.

(a) Neka su $\triangle A_1 B_1 C_1$ i $\triangle A_2 B_2 C_2$ takvi da vrijedi

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2.$$

Neka je p simetrala dužine $A_1 A_2$. Tada je $s_p(A_1) = A_2$. Neka je $\widetilde{B} = s_p(B)$ te neka je q pravac takav da je $s_q((A_2 \widetilde{B}_1)) = (A_2 B_2)$ (postoji po (S_2)).

Stavimo $f = s_q \circ s_p$.

Tada je:

$$f(A_1) = s_q(s_p(A_1)) = s_q(A_2) = A_2,$$

$$f(B_1) = s_q(s_p(B_1)) = s_q(\widetilde{B}_1) \in (A_2 B_2)$$

$$\begin{aligned} d(A_2, f(B_1)) &= d(s_q(A_2) = s_q(s_p(B_1))) \\ &= d(A_2, s_p(B_1)) = d(s_p(A_1), s_p(B_1)) \\ &= d(A_1, B_1) = c_1 = c_2 = d(A_2, B_2). \end{aligned}$$

Klasična geometrija trokuta

Sada je $f(B_1), B_2 \in (A_2B_2)$ i $d(A_2, f(B_1)) = d(A_2, B_2)$, pa je po (M_4) $f(B_1) = B_2$.

Neka je $\widetilde{C_1} = f(C_1)$.

Po *Tm.4*, f preslikava poluravninu određenu pravcem A_1B_1 u poluravninu određenu pravcem A_2B_2 .

1.slučaj Pretp. da $\widetilde{C_1}$ i C_2 leže u istoj poluravnini određenoj pravcem A_2B_2 .

Ako je $\widetilde{C_1} = C_2$, onda je $f(C_1) = C_2$ i f je tražena izometrija.

Ako je $\widetilde{C_1} \neq C_2$, neka je P polovište dužine $\widetilde{C_1C_2}$.

Tada je

$$d(A_2, \widetilde{C_1}) = d(f(A_1), f(C_1)) = d(A_1, C_1) = b_1 = b_2 = d(A_2, C_2),$$

$$d(B_2, \widetilde{C_1}) = d(f(B_1), f(C_1)) = d(B_1, C_1) = a_1 = a_2 = d(B_2, C_2),$$

Dakle, A_2 je jednako udaljena od $\widetilde{C_1}$ i C_2 , pa leži na simetrali stranice $\widetilde{C_1C_2}$ (po *Prop.7.*).

Isto vrijedi i za B_2 i P .

Klasična geometrija trokuta

Po jedinstvenosti simetrale (*Prop.6.*), A_2, B_2, P leže na istom pravcu.

No, tada A_2B_2 siječe $\widetilde{C_1C_2}$ u P , pa $\widetilde{C_1}$ i C_2 nisu s iste strane pravca A_2B_2 . Kontradikcija.

2. slučaj Pretp. da $\widetilde{C_1}$ i C_2 leže u različitim poluravninama određenima pravcem A_2B_2 .

Definirajmo $\widetilde{f} = s_{A_2B_2} \circ f$.

Tada je

$$\widetilde{f}(A_1) = s_{A_2B_2}(f(A_1)) = s_{A_2B_2}(A_2) = A_2$$

$$\widetilde{f}(B_1) = s_{A_2B_2}(f(B_1)) = s_{A_2B_2}(B_2) = B_2$$

$$\widetilde{f}(C_1) = s_{A_2B_2}(f(C_1)) = s_{A_2B_2}(\widetilde{C_1}) = \widehat{C_1}.$$

Sada su $\widehat{C_1}$ i C_2 u istoj poluravnini određenoj s A_2B_2 , pa možemo ponoviti dokaz iz prvog slučaja za $\widetilde{f}$ i $\widehat{C_1}$.

Klasična geometrija trokuta

(b) Neka su $\triangle A_1B_1C_1$ i $\triangle A_2B_2C_2$ takvi da vrijedi $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$,

$$\gamma_1 = \gamma_2.$$

Budući da je $\gamma_1 = \gamma_2$, tj. $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_2C_2B_2$, postoji izometrija g takva da je

$$g((C_1A_1)) = (C_2A_2),$$

$$g((C_1B_1)) = (C_2B_2),$$

$$g(C_1) = C_2.$$

Dakle, $g(A_1) \in (C_2A_2)$ te

$$d(C_2, g(A_1)) = d(g(C_1), g(A_1)) = d(C_1, A_1) = b_1 = b_2 = d(C_2, A_2),$$

pa je $g(A_1) = A_2$ (po (M_4)).

Analogno je $g(B_1) = B_2$, pa je g izometrija koja preslikava vrhove $\triangle A_1B_1C_1$ u vrhove $\triangle A_2B_2C_2$, tj. oni su sukladni.

(c) Slično kao (b), DZ.

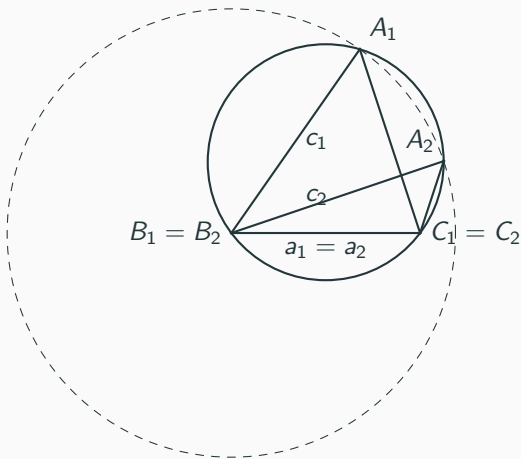
(d) Slično kao (b), DZ.

Klasična geometrija trokuta

Uočimo, u (d) je nužno tražiti podudaranje u kutu nasuprot veće stranice!

Na slici dolje, $\triangle A_1B_1C_1$ i $\triangle A_2B_2C_2$ nisu sukladni, iako vrijedi

$$a_1 = a_2, \quad c_1 = c_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 \quad (\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_2C_2).$$



Definicija

Dužina koja spaja vrh trokuta i polovište nasuprotne stranice naziva se **težišnica**. Dužina koja spaja 2 polovišta stranica zove se **srednjica**.

Definicija

Neka su X, Y, Z nožišta okomica iz A, B, C na pravce BC, AC, AB redom. Dužine AX, BY, CZ zovemo **visine trokuta** $\triangle ABC$.

Definicija

Neka su A, B, C, D točke ravnine takve da se dužine $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ ne sijeku u unutarnjim točkama. "Dio ravnine" omeđen sa $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ zovemo **četverokut**, s **vrhovima** A, B, C, D i **stranicama** $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$. Kutove $\alpha = \angle DAB, \beta = \angle ABC, \gamma = \angle BCD, \delta = \angle CDA$ zovemo **unutarnji kutevi četverokuta**, a kutove α i γ , te β i δ **međusobno nasuprotni kutovi**.

Klasična geometrija trokuta

Definicija

Trapez je četverokut kojem bar jedan par nasuprotnih stranica leži na paralelnim pravcima. Te stranice zovemo *osnovice* ili *baze*, a preostale dvije stranice *krakovi*.

Definicija

Paralelogram je četverokut kojem oba para nasuprotnih stranica leže na paralelnim pravcima.

Definicija

Pravokutnik je paralelogram kod kojeg je jedan kut pravi (DZ: tada su svi kutevi pravi).

Kvadrat je pravokutnik kod kojeg su sve stranice jednake.

Definicija

Romb je paralelogram kod kojeg su sve stranice jednake.

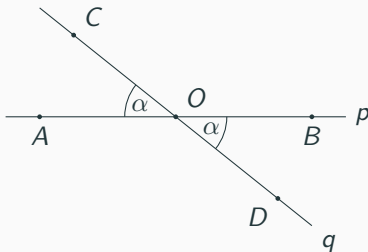
Klasična geometrija trokuta

Propozicija

Neka su AB i CD dva pravca koji se sijeku u točki O kao na slici. Tada je

$$\angle AOC = \angle BOD.$$

Takve kutove zovemo *vršni kutovi*.



Dokaz.

Centralna simetrija s centrom u O preslikava (OA) u (OB) , (OC) u (OD)



Propozicija 19

- (a) *Nasuprotne stranice i nasuprotni kutevi paralelograma su jednaki.*
- (b) *Četverokut je paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.*
- (c) *Četverokut kojem su dvije nasuprotne stranice paralelne i jednake duljine je paralelogram.*

Dokaz.

- (a) Kako je DB transversala pravaca AB i CD , po Prop.14 vrijedi $\angle ABD = \angle BDC$, te $\angle DBC = \angle ADB$.

Po teoremu o sukladnosti (K-S-K), $\triangle ABD \cong \triangle CDB$, pa je

$$\overline{AB} = \overline{CD},$$

$$\overline{AD} = \overline{BC},$$

$$\angle BAD = \angle BCD,$$

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \angle CDA + \angle ADB = \angle CDA.$$

Klasična geometrija trokuta

(b) $\Rightarrow$ Neka je $ABCD$ paralelogram. Neka je O sjecište dijagonala (DZ, dokaz da dijagonale nisu paralelne).

Budući da je AC transversala pravaca AB i CD , $\angle OAB = \angle OCD$.

Analogno, BD je transversala pravaca AB i CD , pa je $\angle ABO = \angle ODC$.

Prema (a) dijelu, $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$.

Po teoremu (K-S-K), $\triangle ABO \cong \triangle CDO$, pa je $|\overline{AO}| = |\overline{CO}|$,
 $|\overline{BO}| = |\overline{DO}|$.

Slijedi da je O polovište stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

$\Leftarrow$ Neka se u četverokutu $ABCD$ dijagonale raspolavljaju, tj.

$$|\overline{AO}| = |\overline{CO}|,$$

$$|\overline{BO}| = |\overline{DO}|.$$

Pokažimo da je $AB \parallel CD$ (analogno se dobije i $BC \parallel AD$).

Vršni kutovi: $\angle AOB = \angle COD$.

Po Teoremu (S-K-S), $\triangle AOB \cong \triangle COD$, pa je i $\angle CAB = \angle DCA$.

Slijedi da je $AB \parallel CD$ po *Prop.15.*

(c) Dokaže se preko (b) (DZ).

Propozicija 20 (O srednjici trokuta)

Srednjica trokuta paralelna je trećoj stranici. Također, duljina srednjica jednaka je polovici duljine treće stranice.

Dokaz. Neka su P i Q redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

Tvrdimo da je $PQ \parallel BC$ i $|\overline{PQ}| = \frac{1}{2}|\overline{BC}|$.

Neka X leži na pravcu PQ tako da Q bude polovište dužine $\overline{PX}$.

Tada se dijagonale četverokuta $PCXA$ raspolavljaju, pa je to paralelogram (*Prop.19.(b)*).

Slijedi da je $|\overline{XC}| = |\overline{AP}| = |\overline{PB}|$ te $XC \parallel AP$, tj. $XC \parallel BP$.

Slijedi da je i $BCXP$ paralelogram (*Prop.18.(c)*).

Zato je $PX \parallel BC$ i $|\overline{PX}| = |\overline{BC}|$.

Konačno, $PQ \parallel BC$ i $|\overline{PQ}| = \frac{1}{2}|\overline{PX}| = \frac{1}{2}|\overline{BC}|$.



Teorem 21 (o težištu trokuta)

Težišnice $\overline{AP_1}$, $\overline{BP_2}$ i $\overline{CP_3}$ trokuta $\triangle ABC$ sijeku se u jednoj točki T koju nazivamo **težište** $\triangle ABC$. Nadalje, vrijedi

$$|\overline{AT}| = 2|\overline{TP_1}|, \quad |\overline{BT}| = 2|\overline{TP_2}|, \quad |\overline{CT}| = 2|\overline{TP_3}|.$$

Klasična geometrija trokuta

Dokaz.

Neka je $X = \overline{AP_1} \cap \overline{BP_2}$. Pokažimo prvo $|\overline{AX}| = 2|\overline{XP_1}|$.

Neka je Q_1 polovište $\overline{AX}$, Q_2 polovište $\overline{BX}$.

$\overline{Q_1Q_2}$ je srednjica u $\triangle ABX$, pa je $Q_1Q_2 \parallel AB$, $|\overline{Q_1Q_2}| = \frac{1}{2}|\overline{AB}|$.

$\overline{P_1P_2}$ je srednjica u $\triangle ABC$, pa je $P_1P_2 \parallel AB$, $|\overline{P_1P_2}| = \frac{1}{2}|\overline{AB}|$.

Slijedi da je $P_1P_2 \parallel Q_1Q_2$ i $|P_1P_2| = |Q_1Q_2|$, pa je $P_1P_2Q_1Q_2$ paralelogram.

Zato mu se dijagonale raspolavljaju, tj.

$$|\overline{Q_1X}| = |\overline{P_1X}| = |\overline{AQ_1}|, \quad |\overline{Q_2X}| = |\overline{P_2X}| = |\overline{BQ_2}|.$$

Zato je $|\overline{AX}| = 2|\overline{P_1X}|$, $|\overline{BX}| = 2|\overline{P_2X}|$.

Neka je sada $Y \in \overline{BP_2} \cap \overline{CP_3}$.

Analognim dokazom dobije se $|\overline{BY}| = 2|\overline{P_2Y}|$, pa je $X = Y$ (po (M_4)).

Dakle, sve tri težišnice sijeku se u istoj točki.

Propozicija 22 (o srednjici trapeza)

Neka su P_1 i P_2 polovišta krakova $\overline{BC}$ i $\overline{DA}$ trapeza $ABCD$.

Vrijedi, $|P_1P_2| = \frac{1}{2} (|\overline{AB}| + |\overline{CD}|)$. Srednjica $\overline{P_1P_2}$ je paralelna osnovicama.

Dokaz.

Neka je E polovište stranice $\overline{AC}$.

Tada je P_2E srednjica $\triangle ACD$

Slijedi da je $P_2E \parallel DC$ i $|P_2E| = \frac{1}{2}|CD|$

Također, EP_1 srednjica $\triangle ABC$

Slijedi da je $P_1E \parallel AB$ i $|P_1E| = \frac{1}{2}|AB|$.

P_1, P_2, E leže na istom pravcu, jer inače kroz E idu dva pravca paralelna s AB .

Slijedi da je $P_1P_2 \parallel AB$, te $|P_1P_2| = |P_1E| + |P_2E| = \frac{1}{2}|AB| + \frac{1}{2}|CD|$.

Klasična geometrija trokuta

Teorem 23 (o simetralama stranica)

Simetrale stranica $\triangle ABC$ sijeku se u jednoj točki O .

Točka O jednako je udaljena od svih vrhova trokuta i zovemo ju **središte opisane kružnice** $\triangle ABC$.

Dokaz.

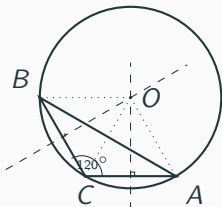
Neka su p_1, p_2 simetrale stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ redom, te $O = p_1 \cap p_2$.

Po Prop.7., $|BO| = |CO|$ jer $O \in p_1$ te $|CO| = |AO|$ jer $O \in p_2$.

Dakle, $|AO| = |BO|$, pa zbog Prop.7. točka O leži i na simetrali $\overline{AB}$.

Dakle, sve 3 simetrale se sijeku u istoj točki. □

Uočimo, središte opisane kružnice ne mora ležati unutar trokuta.



Definicija

Simetrala kuta $\angle AOB$ je pravac p takav da je $p((OA)) = (OB)$. (Postoji po aksiomu (S_2))

Uočimo, iz definicije simetrale kuta slijedi da postoji izometrija takva da preslikava krakove kuta između (AO) i (Op) u kut između (BO) i (Op) , pa su ti kutovi jednaki.

Lema 24

Točka leži na simetrali kuta ako i samo ako je jednako udaljena od njegovih krakova.

Dokaz.

$\Rightarrow$ Neka je T točka na simetrali kuta $\angle AOB$. Neka su N_1, N_2 nožišta okomica iz T na krakove (OA) i (OB) (postoje po Prop.8(c)).

Slijedi da je $|N_1 T| = |N_2 T|$.

$\Leftarrow$ Slijedi po $(S-S-K^>)$ (+ Prop.13.(a), mjera pravog i ispruženog kuta, zbroj kutova u trokutu).

Klasična geometrija trokuta

Teorem 25 (o simetralama kutova)

Sve tri simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki.

*Tu točku zovemo **središte upisane kružnice** trokuta; postoji kružnica kojoj je ona središte i koja dodiruje sve 3 stranice.*

Dokaz.

Neka je X sjecište simetrale p_α kuta $\angle CAB$ i simetrale p_β kuta $\angle ABC$, te neka su N_1, N_2, N_3 nožišta okomica iz X na $\overline{BC}, \overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom.

Kako je $X \in p_\alpha$, po Lemi 23. slijedi $|\overline{N_2X}| = |\overline{N_3X}|$.

Također, zbog $X \in p_\beta$, slijedi da je $|\overline{N_1X}| = |\overline{N_3X}|$.

Sada zbog $|\overline{N_1X}| = |\overline{N_2X}|$ i Leme 23, slijedi da X leži na simetrali $\angle ACB$.

Dakle, sve 3 simetrale sijeku se u jednoj točki X .

Kružnica sa središtem u X radijusa $|\overline{N_1X}| = |\overline{N_2X}| = |\overline{N_3X}|$ dodiruje sve 3 stranice $\triangle ABC$ prema Prop.14.(a)(2).



Lema

Pravac koji je okomit na dužinu i prolazi njezinim polovištem je simetrala te dužine.

Dokaz.

Neka je $\overline{AB}$ dužina i p pravac okomit na nju koji prolazi njezinim polovištem P .

Za svaku točku $T \in p$ vrijedi da je $\triangle TPA \cong TPB$ po (S-K-S). Zato je T točka na simetrali sim_{AB} dužine $\overline{AB}$. Dakle, $p \subseteq \text{sim}_{AB}$. No, tada je $p = \text{sim}_{AB}$, po Prop.0. □

Teorem 26 (o visinama trokuta)

Pravci na kojima leže visine trokuta se sijeku u jednoj točki.

*Tu točku zovemo **ortocentar** trokuta.*

Klasična geometrija trokuta

Dokaz. Povucimo paralelu na p_C s AB kroz C , p_A s BC kroz A , p_B s AC kroz B .

Te paralele čine novi trokut $\triangle XYZ$,

$X := p_B \cap p_C$, $Y := p_A \cap p_C$, $Z := p_B \cap p_C$.

Tada, $AB \parallel XY$, $BC \parallel YZ$, $CA \parallel ZX$.

Uočimo, $ABCY$ je paralelogram, pa je $|\overline{AY}| = |\overline{BC}|$ i $|\overline{YC}| = |\overline{AB}|$.

Također, $ABXC$ je paralelogram, pa je $|\overline{BX}| = |\overline{AC}|$ i $|\overline{CX}| = |\overline{AB}|$

Također, $AZBC$ je paralelogram, pa je $|\overline{ZB}| = |\overline{AC}|$ i $|\overline{AZ}| = |\overline{BC}|$

Dakle, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ su srednjice $\triangle XYZ$, pa su A, B, C polovišta $\overline{YZ}$, $\overline{XZ}$, $\overline{XY}$.

Također, budući da je visina iz C okomita na AB , slijedi da je okomita i na XY , analogno za ostale dvije visine.

Slijedi da su pravci na kojima leže visine $\triangle ABC$ simetrale stranica $\triangle XYZ$, pa se (po *Tm.23.*) sijeku u jednoj točki.



Klasična geometrija trokuta

Uočimo, ortocentar trokuta ne mora ležati unutar trokuta.

